

Prof. Dr. Alfred Toth

Grundlegung einer Theorie qualitativer Relationalzahlen

1. In Toth (2019a) hatten wir uns gefragt, was denn eine Relation zur semiotischen Relation macht. Nun hatte zwar Bense (1981, S. 17 ff.) das Zeichen als triadische Relation über Primzeichen oder Zeichenzahlen eingeführt

$$Z = (1, 2, 3)$$

und die Isomorphie der Zeichenzahlen mit den Peanozahlen bereits in Bense (1975, S. 167 ff.) aufgezeigt, allein, während die Peanozahlen die Folge

$$P = (1, 2, 3, \dots, n)$$

bilden, bilden die Relationalzahlen eine ganz andere Folge

$$Z = (1, ((1, 2), (1, 2, 3)), (1, ((1, 2), ((1, 2, 3), (1, 2, 3, 4))), \dots),$$

insofern

$$2 := (1 \rightarrow 2)$$

$$3 := (1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), \text{ usw.}$$

definiert sind. Bense (1979, S. 53) hatte das wie folgt dargestellt:

$$ZR(M, O, I) =$$

$$ZR(M, M \rightarrow O, M \rightarrow O \rightarrow I) =$$

$$ZR(\text{mon. Rel.}, \text{dyad. Rel.}, \text{triad. Rel.})$$

$$ZR(.1., .2., .3.) =$$

1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3	1.1	1.2	1.3
			2.1	2.2	2.3	2.1	2.2	2.3
						3.1	3.2	3.3

„Mit dieser Notation wird endgültig deutlich, daß Repräsentation auf Semiotizität und Semiotizität auf Gradation der Relationalität beruht“ (Bense 1979, S. 53). Man darf somit eine semiotische Relation als eine gradative Relation definieren. Und da somit gilt

$$Z = (1, 2, 3) = (1 \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3))),$$

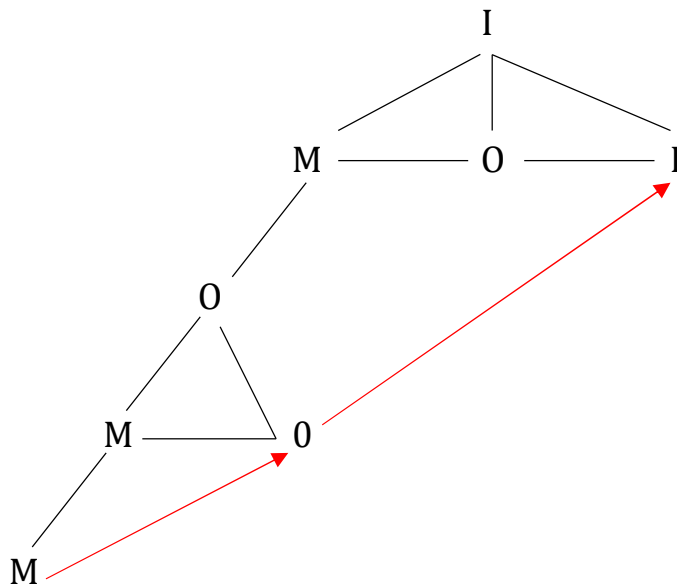
ist Z also eine Relation, die sich selbst und alle ihre Teilrelationen enthält. Als selbstreflexive Relation kann sie allerdings nur mittels einer Mengentheorie

beschrieben werden, für die das Fundierungsaxiom nicht gilt (vgl. Aczel 1988).

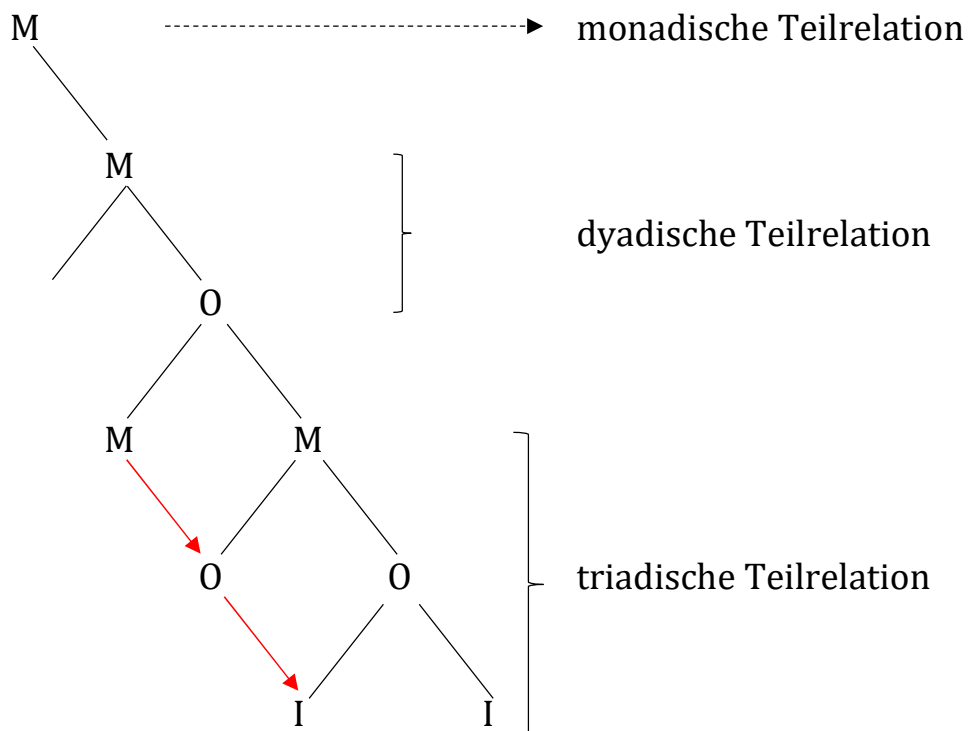
Graphisch lässt sich die relationalzahlige Relation

$$Z = (M \rightarrow ((M \rightarrow O) \rightarrow (M \rightarrow O \rightarrow I)))$$

durch



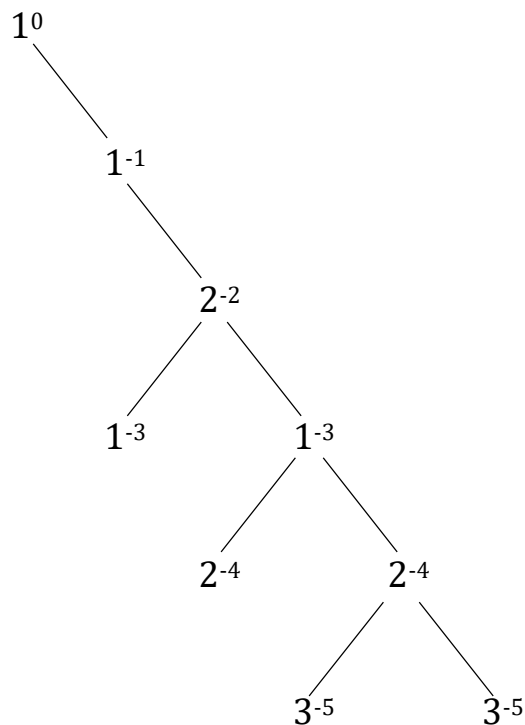
darstellen. Man kann diesen Graphen leicht in eine Baumableitung verwandeln, indem man mit der Kategorie M als Kopf der Ableitung beginnt.



Wenn man nun die semiotischen Kategorien auf die Peircezahlen abbildet

$\text{Kat}(\text{sem}) \rightarrow P = (M, O, I) \rightarrow (1, 2, 3),$

dann erhält man den folgenden semiotischen Baum mitsamt den Einbettungsstufen



Z lässt sich damit in der Form von Relationalzahlen (R) redefinieren (vgl. Toth 2019b)

$Z = ((1^0, 1^{-1}, 1^{-3}), (2^{-2}, 2^{-4}), 3^{-5}).$

Für jede Peircezahl P gilt also $P = f(R)$. Damit werden aber Lücken in der M-Zahlenfolge durch Zahlen aus den O- und I-Folgen geschlossen:

	M	O	I
0	1		
-1	1		
-2	←	2	
-3	1		
-4	←	2	
-5	←		3

Mit der Abbildung von Peanozahlen und Relationalzahlen geht also eine Rechtsmehrdeutigkeit einher, welche zwar auf Kosten der mathematischen Präzision geht, gleichzeitig aber ein zusätzliches Moment der kategorialen

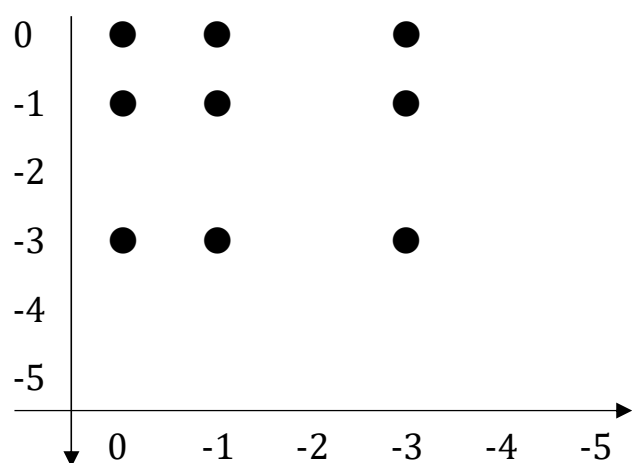
Freiheit schafft. (Entsprechendes ist aus der Mathematik der Qualitäten bekannt, vgl. Kronthaler 1986, S. 60.).

Bildet man nun die Peircezahlen auf Relationalzahlen ab (vgl. Toth 2021), dann wird wegen Rechtsmehrdeutigkeit der Abbildung jedem $Z \subset \text{Zkl}$ ein Feld $F(Z)$ zugeordnet.

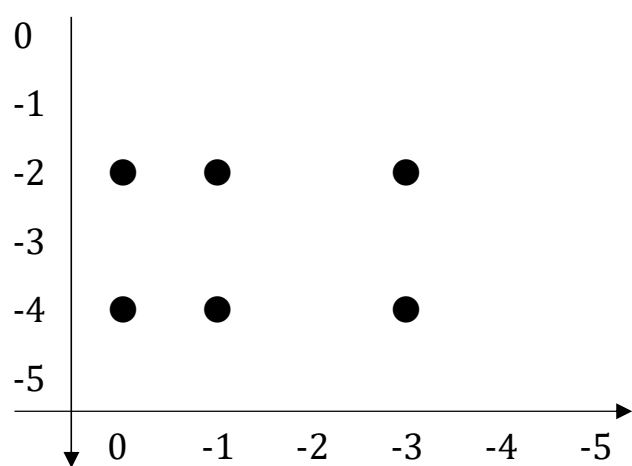
Peanozahl	Relationalzahl
(1.1)	→ $(1^0, 1^0), (1^0, 1^{-1}), (1^0, 1^{-3})$ $(1^{-1}, 1^0), (1^{-1}, 1^{-1}), (1^{-1}, 1^{-3})$ $(1^{-3}, 1^0), (1^{-3}, 1^{-1}), (1^{-3}, 1^{-3})$
(1.2)	→ $(1^0, 2^{-2}), (1^0, 2^{-4})$ $(1^{-1}, 2^{-2}), (1^{-1}, 2^{-4})$ $(1^{-3}, 2^{-2}), (1^{-3}, 2^{-4})$
(1.3)	→ $(1^0, 3^{-5})$ $(1^{-1}, 3^{-5})$ $(1^{-3}, 3^{-5})$
(2.1)	→ $(2^{-2}, 1^0), (2^{-2}, 1^{-1}), (2^{-2}, 1^{-3})$ $(2^{-4}, 1^0), (2^{-4}, 1^{-1}), (2^{-4}, 1^{-3})$
(2.2)	→ $(2^{-2}, 2^{-2}), (2^{-2}, 2^{-4})$ $(2^{-4}, 2^{-2}), (2^{-4}, 2^{-4})$
(2.3)	→ $(2^{-2}, 3^{-5})$ $(2^{-4}, 3^{-5})$
(3.1)	→ $(3^{-5}, 1^0), (3^{-5}, 1^{-1}), (3^{-5}, 1^{-3})$
(3.2)	→ $(3^{-5}, 2^{-2}), (3^{-5}, 2^{-4})$
(3.3)	→ $(3^{-5}, 3^{-5})$

Man kann die Rechtsmehrdeutigkeit der Relationalzahlen als Punktfunktionen wie folgt darstellen.

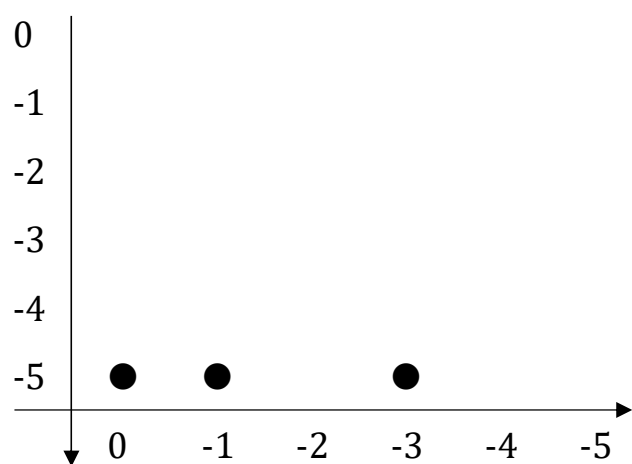
$F(1.1) =$



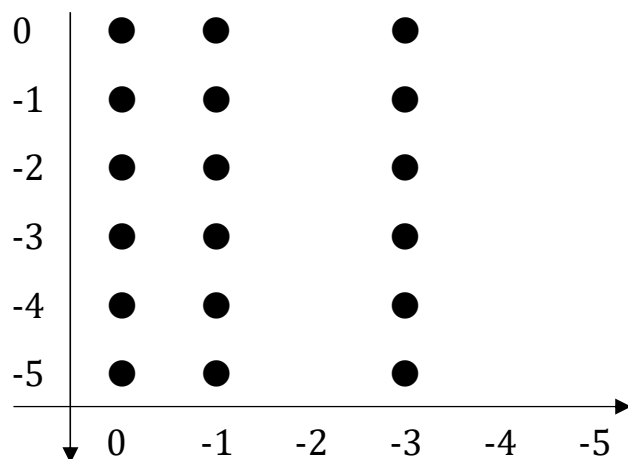
$F(1.2) =$



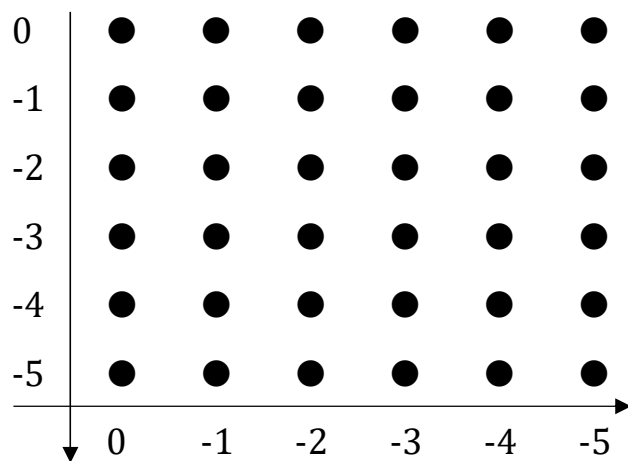
$F(1.3) =$



$$F(1.1, 1.2, 1.3) =$$



$$F(1.1, \dots, 3.3)$$



Wie man sowohl aus dem Feld des Vollständigen Zeichens (3.5.) als auch aus der nachstehenden Tabelle ersieht, ist die konverse Abbildung der Relationalzahlen auf die Peircezahlen injektiv:

$(0, 0)$	$\rightarrow$	(1.1)	$(-1, 0)$	$\rightarrow$	(1.1)
$(0, -1)$	$\rightarrow$	(1.1)	$(-1, -1)$	$\rightarrow$	(1.1)
$(0, -2)$	$\rightarrow$	(1.2)	$(-1, -2)$	$\rightarrow$	(1.2)
$(0, -3)$	$\rightarrow$	(1.1)	$(-1, -3)$	$\rightarrow$	(1.1)
$(0, -4)$	$\rightarrow$	(1.2)	$(-1, -4)$	$\rightarrow$	(1.2)
$(0, -5)$	$\rightarrow$	(1.3)	$(-1, -5)$	$\rightarrow$	(1.3)
$(-2, 0)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-3, 0)$	$\rightarrow$	(1.1)
$(-2, -1)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-3, -1)$	$\rightarrow$	(1.1)

$(-2, -2)$	$\rightarrow$	(2.2)	$(-3, -2)$	$\rightarrow$	(1.2)
$(-2, -3)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-3, -3)$	$\rightarrow$	(1.1)
$(-2, -4)$	$\rightarrow$	(2.2)	$(-3, -4)$	$\rightarrow$	(1.2)
$(-2, -5)$	$\rightarrow$	(2.3)	$(-3, -5)$	$\rightarrow$	(1.3)

$(-4, 0)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-5, 0)$	$\rightarrow$	(3.1)
$(-4, -1)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-5, -1)$	$\rightarrow$	(3.1)
$(-4, -2)$	$\rightarrow$	(2.2)	$(-5, -2)$	$\rightarrow$	(3.2)
$(-4, -3)$	$\rightarrow$	(2.1)	$(-5, -3)$	$\rightarrow$	(3.1)
$(-4, -4)$	$\rightarrow$	(2.2)	$(-5, -4)$	$\rightarrow$	(3.2)
$(-4, -5)$	$\rightarrow$	(2.3)	$(-5, -5)$	$\rightarrow$	(3.3)

2. Zunächst seien die drei Zählweisen der in Toth (2016) eingeführten ortsfunktionalen Arithmetik wiederholt.

2.1. Sind x und y linear, so liegt die adjazente Zählweise vor

x_i	y_j		y_i	x_j		y_j	x_i		x_j	y_i
$\emptyset_i$	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	$\emptyset_j$		$\emptyset_j$	$\emptyset_i$		$\emptyset_j$	$\emptyset_i$
		$\times$			$\times$			$\times$		
$\emptyset_i$	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	$\emptyset_j$		$\emptyset_j$	$\emptyset_i$		$\emptyset_j$	$\emptyset_i$
x_i	y_j		y_i	x_j		y_j	x_i		x_j	y_i

2.2. Sind x und y orthogonal, so liegt die subjazente Zählweise vor

x_i	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	x_j		$\emptyset_j$	x_i		x_j	$\emptyset_i$
y_i	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	y_j		$\emptyset_j$	y_i		y_j	$\emptyset_i$
		$\times$			$\times$			$\times$		
y_i	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	y_j		$\emptyset_j$	y_i		y_j	$\emptyset_i$
x_i	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	x_j		$\emptyset_j$	x_i		x_j	$\emptyset_i$

2.3. Sind x und y diagonal, so liegt die transjazente Zählweise vor

x_i	$\emptyset_j$		$\emptyset_i$	x_j		$\emptyset_j$	x_i		x_j	$\emptyset_i$
$\emptyset_i$	y_j		y_i	$\emptyset_j$		y_j	$\emptyset_i$		$\emptyset_j$	y_i

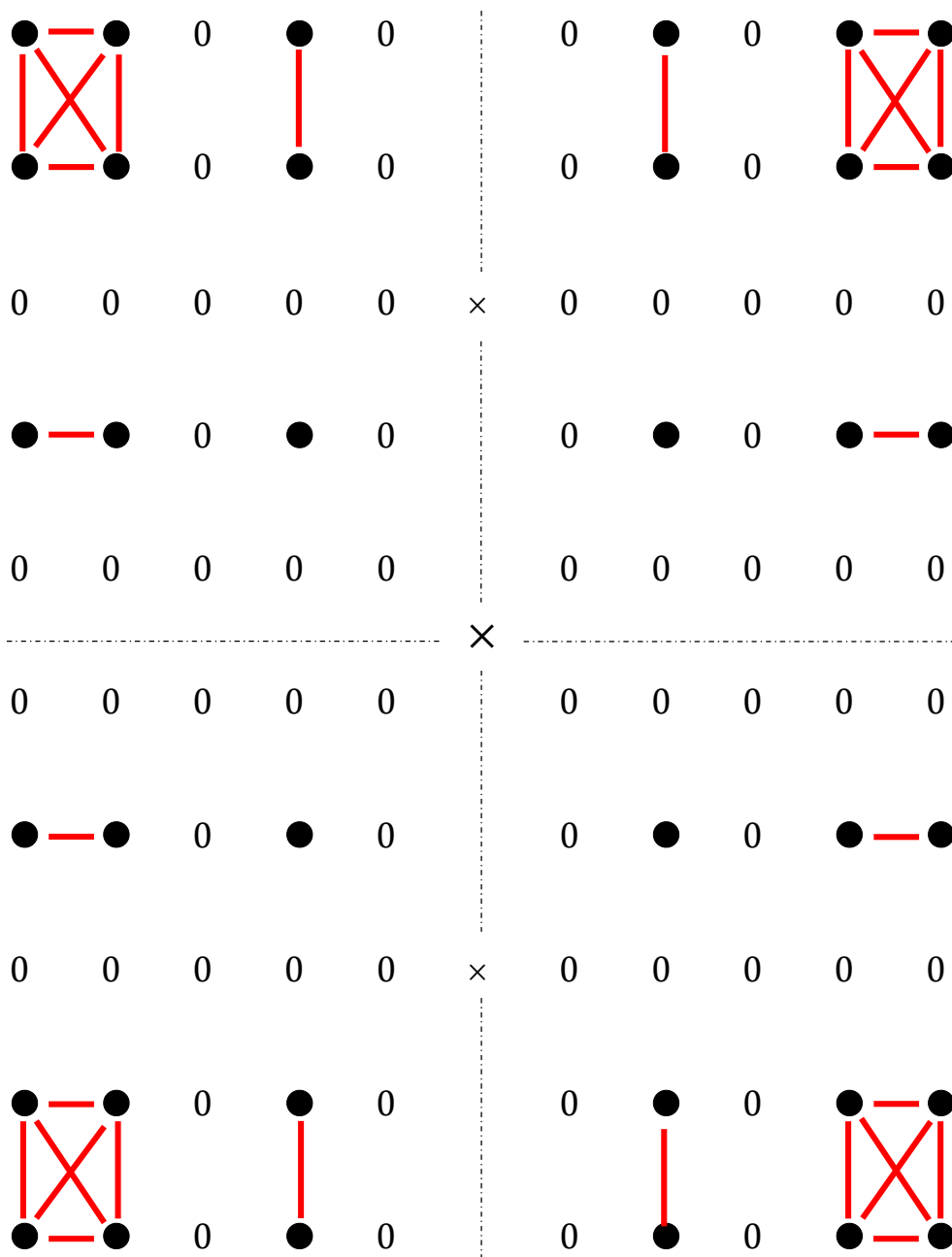
$$\begin{array}{ccccccc}
& & \times & & \times & & \times \\
\emptyset_i & y_j & & y_i & \emptyset_j & & y_j & \emptyset_i & & \emptyset_j & y_i \\
x_i & \emptyset_j & & \emptyset_i & x_j & & \emptyset_j & x_i & & x_j & \emptyset_i.
\end{array}$$

Jede qualitative Peanozahl $P = f(\omega)$ kann daher pro Zählweise an 8 verschiedenen ontischen Orten ω gezählt werden.

Zur Darstellung einer Relationalzahl benötigen wird nun allerdings 5 Einbettungsebenen, sofern wir uns auf die triadisch-trichotomische Zeichenrelation beschränken. Mit Hilfe der oben dargestellten Punktfunktionen sind wir imstande, ortsfunktionale Relationalzahlen ($RZ = f(\omega)$) zu konstruieren. Diese $RZ = f(\omega)$ unterscheiden sich also von den gewöhnlichen $P = f(\omega)$ dadurch, daß die (natürlich den P bereits inhärierenden) Einbettungsstufen sichtbar gemacht werden können (man könnte also, in gewissem Sinne, von kognitiven qualitativen Zahlen sprechen). Als Beispiel sei $(1.1) = f(\omega)$, d.h.

$$F(1.1) = \left(\begin{array}{l} (1^0, 1^0), (1^0, 1^{-1}), (1^0, 1^{-3}) \\ (1^{-1}, 1^0), (1^{-1}, 1^{-1}), (1^{-1}, 1^{-3}) \\ (1^{-3}, 1^0), (1^{-3}, 1^{-1}), (1^{-3}, 1^{-3}) \end{array} \right) = f(\omega)$$

für alle 4 qualitativen (doppelt chiastischen) Quadranten dargestellt.



Literatur

Aczel, Peter, Non-Well-Founded Sets. Stanford, CA, 1988

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten.
Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Einführung in die qualitative Arithmetik. In: Electronic Journal
for Mathematical Semiotics, 2016

Toth, Alfred, Semiotik als Theorie gradativer Relationalität. Tucson, AZ
2019 (= 2019a)

Toth, Alfred, Theorie der Relationalzahlen. Tucson, AZ 2019 (= 2019b)

Toth, Alfred, Formen einbettungstheoretischer Eigenrealität. In: Electronic
Journal for Mathematical Semiotics, 2021

29.1.2021